Number 23.0

Title: Der Nachweis eines systematisch vorhandenen und genutzten dimensionslosen Funktionswertesystems als Vorgänger unserer heutigen trigonometrischen Funktionen, rund 1500 Jahre vor Hipparchos

Author: Jens Kleb (Erfurt, Germany)

Posted to web: 8 November 2021

Thema:

Der Nachweis eines systematisch vorhandenen und genutzten dimensionslosen Funktionswertesystems als Vorgänger unserer heutigen trigonometrischen Funktionen, rund 1500 Jahre vor Hipparchos

Autor: Jens Kleb, Erfurt

Schlagworte: altbabylonisches Funktionswertesystem, Diagonalenrechnung, Plimpton 322, älteste astronomische Beobachtung

Abstract:

Die hier vorgestellte und komplett wieder aufgedeckte Berechnungsabfolge der Keilschrifttafel Plimpton 322 beweist erstmalig und konsistent, dass es vor ca. 3800 Jahren, zur Zeit der Himmelsscheibe von Nebra, bereits ein systematisch angewandtes exaktes Messsystem mittels trigonometrischer Funktionswerte gab.

Hierbei wurde, wie die folgende Arbeit belegt und wie von uns auch heute noch praktiziert, eine Geometrie im Kreis genutzt. Diese wurde, mittels der Anwendung des Satzes des Pythagoras´, welcher rund 1200 Jahre später lebte, aber der heute nach diesem benannt ist, ausgewertet. Grundsätzlich lassen sich jedoch auch weitere, später griechischen Gelehrten zugeschriebene Regeln, durch das hierbei zugrunde liegende geometrische Konstrukt bereits erkennen.

Wie durch die weitere Berechnung von ebenfalls gültigen Zeilen in der Form von Plimpton 322 im Vorfeld belegt, gibt es sowohl ober- wie unter-halb, aber auch zwischen den einzelnen auf Plimpton 322 enthaltenen Zeilen, zahlreiche weitere valide Tripel.

Das komplexe Verfahren zur Dokumentation und Berechnung der Werte auf Plimpton 322, weißt in Kombination mit den insgesamt möglichen Zeilen (Steigungsdreiecken) für den kompletten gültigen Wertebereich, dieses vollständige System sehr plausibel nach.

Gleichzeitig kann ein zweiter Berechnungsschritt auf Plimpton 322, für eine beabsichtigte Dokumentation, Darstellung (auch maßstäblich) und Übernahme an anderen Orten, nachvollziehbar aufgezeigt werden. Dieser unterstreicht die Bedeutung der festgehaltenen Werte und gibt so auch einen plausiblen Hinweis auf den eigentlichen Grund der Erstellung der Tafel.

Die hier nun nachvollziehbar dargelegte Anwendung und Dokumentation mittels Steigungsdreiecken in altbabylonischer Zeit, geht dabei weit über das bisher bekannte Maß hinaus.

Die Genauigkeit der Einzelrechnung lag, ebenso nachweisbar, wie selbstverständlich der Mathematik geschuldet, damals auf dem exakt gleichen Niveau, wie die Genauigkeit der heute verwandten trigonometrischen Funktionen. Allerdings begnügte man sich zumindest zu diesem Zeitpunkt noch mit einer Unterteilung eines Viertelkreises in mindestens 150 Steigungsdreiecke bzw. Winkelanteile, dies auf einen Vollkreis bezogen einspricht allerdings schon einem regelmäßigen N-Eck mit 600 Seiten.

Das altbabylonische trigonometrische Funktionswertesystem, bzw. „die babylonische Diagonalenrechnung“, ist auch Aufgrund des nachweislich genutzten geometrischen Konstrukts zur Werteberechnung, der Urvater der griechischen Chordenrechnung und der indo-arabischen trigonometrischen Funktionen des frühen Mittelalters, welche wir bis heute nutzen.

Erfurt, Germany, Sept. 2021

Topic:

About the Evidence of a systematically existing and used dimensionless function value system as the predecessor of our current trigonometric functions, around 1500 years before Hipparchus.

Author: Jens Kleb

Keywords: old Babylonian function value system, Diagonal Calculation, Plimpton 322, oldest astronomical observation

English Abstract:

The here, for the first time presented, completely and plausible comprehensible calculation procedure, of the Plimpton 322 cuneiform tablet proves that, a systematically applied, exact measuring system by the usage of trigonometric function Values, has already been existed. This was around 3800 years ago, at the estimated manufacturing time of the Nebra Sky Disc.

With this deciphered procedure it can be plausible explained that, as we it still practice today, a geometry in the Circle has been used for this Calculations.

The Principles used, based on of the usage of the regularities, which around 1200 years later, were named after Pythagoras, but they are going much farther. The inherent geometrical construct, Babylonian like everytime, very efficent, shows us by that way, also other later greek named mathematic/geometric principles and also the way over the greek calculation by chords, until our trigonometric System of today.

It can be additional shown that, during a second calculation step, for an intended documentation, representation (also to scale) or transfer to other locations, the dimensionless (here on the basis 60) calculated function value, was expanded and by this way was transformed, into a measurable length.

The Usage of inclining triangles partly known also from other cuneiform Tablets during old Babylonian Age, is setted by the deciphered procedure to an other Level and goes far beyond the previously known of this age.

The accuracy of the individual calculation is just as verifiable and of course due to mathematics, at that time on exactly the same level as the trigonometric functions used today.

However, at least at this point in time, the Babylonians was content with dividing a quarter circle into at least 150 different inclining triangles. This on the other hand, corresponds to a geometric regular N-corner with 600 sides, in relation to a full circle.

The ancient Babylonian trigonometric function value system, precise "the babylonian diagonalcalculation system" and there calculation principles, is thus the forerunner of the Greek chord calculation and the Indo-Arabic trigonometric functions of the early middle Ages, which we still use today.

Inhaltsverzeichnis:

1.Ein kurzer Ausblick in die bisherige Forschungsgeschichte zu Plimpton 322

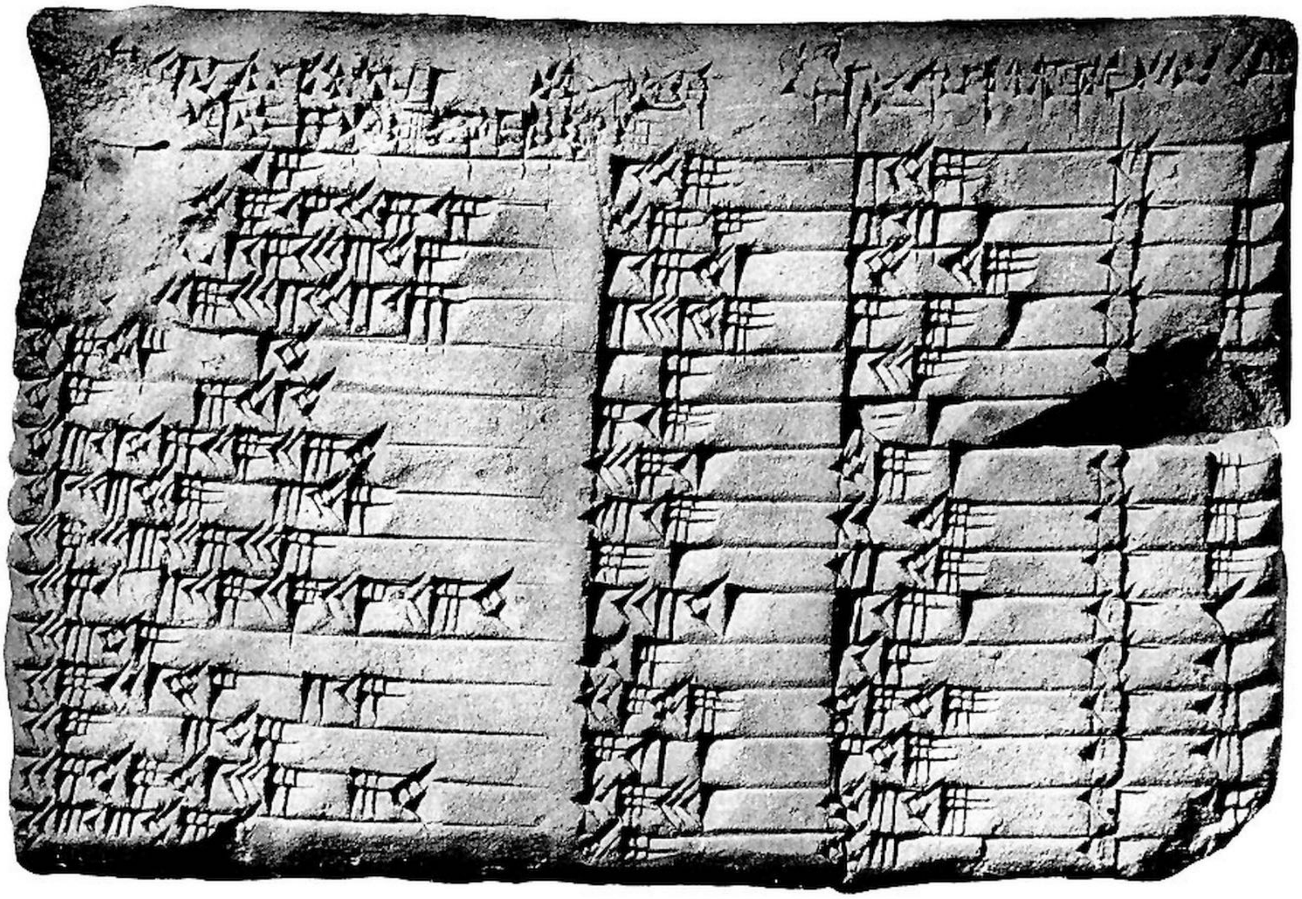


Abb. 1 Die Keilschrifttafel Plimpton 322 in einer Abbildung von Neugebauer und Sachs 1945

Die in der Plimpton Sammlung der New Yorker Columbia University seit 1923 verwahrte Keilschrifttafel, wurde von E. J. Banks vermutlich in der Nähe von Larsa, heute Tell Senkereh gefunden oder gekauft. Deren Alter wird auf 3800 Jahre geschätzt und das die Keilschrifttafel in den 15 Zeilen zumindest jeweils 2 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks beinhaltet, wurde erstmals durch O. Neugebauer und A. Sachs (1945) erkannt. Die sogenannten pythagoreischen Tripel rund 1200 Jahre vor Pythagoras und die damit implizierte Nutzung der Gleichung $a^2+b^2 = c^2$ sorgte seitdem für reges Interesse in der Wissenschaft. Viele Theorien zur Berechnung und Verwendung der Tafel wurden seither intensiv diskutiert, jedoch blieben immer einige Fragen offen. Zuletzt beschäftigten sich unter anderen Buck, Friberg, Høyrup, Robson, Britton sowie Mansfield und Wildberger mit Plimpton 322.

Hieraus verfestigten sich zwei wissenschaftliche Lager, welche sogar teilweise wie Robson (2001 S.176) Regeln formulierten, weshalb die jeweils andere Seite falsch liege. Diese 6 damals formulierten Ausschlusskriterien für die Nutzung von Winkeln in altbabylonischer Zeit, werden auf den folgenden Seiten ebenfalls untersucht und es wird sich zeigen, dass mit der wiederentdeckten Berechnungs-abfolge und der deren Ergebnissen durchaus keinerlei Widerspruch entsteht, sondern der Inhalt der Keilschrifttafel all diese aufgestellten Regeln berücksichtigt.

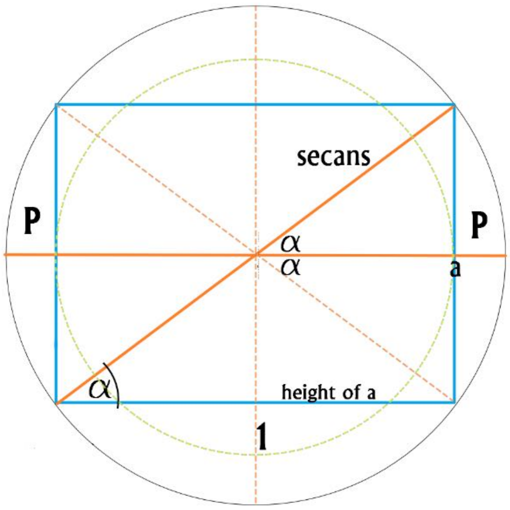
Während so, Eleanor Robson und andere (Robson, 2002; Friberg, 2007), die Lösung von Plimpton 322 weiter in der Erstellung bzw. Generierung von pythagoreischen Tripeln bzw. auch daraus einen altbabylonischen Ansatz zur Erstellung reziproker Paare vermuten, sind Mansfield und Wildberger (2017) der Meinung, dass es sich um eine Art trigonometrischer Tabelle handelte, die vielleicht als Grundlage für weitere Interpolationen diente. Sie resümieren in Ihrer Arbeit (2017), dass keine andere bisherige Erklärung ein solch hohes Maß an Plausibilität hätte wie die ihre.

Offen bleibt jedoch weshalb und wie, die in Table 13 ihrer Arbeit enthaltenen Werte b und d, die wir ja auch als einziges auf Plimpton 322 wiederfinden, kalkuliert worden sind, wenn doch bereits die Werte β und δ der gleichen Tabelle 13 den Winkel genau definieren. So bezieht sich die Rekonstruktion der Berechnung der Inhalte der Tafel auf eine Abfolge von 11 Schritten (S.405, 406) Sie gehen hierbei davon aus, dass es scheinbar eine maximale Anzahl der sich ergebenden Zeilen von 38 gab. Zusätzlich mussten diese im siebten Schritt jedoch nach absteigender Reihe sortiert werden. Warum absteigend und nicht aufsteigend wie auch in unseren heutigen trigonometrischen Tabellen, wird hierbei jedoch nicht erläutert. Die Inhalte von Plimpton 322 entstanden somit erst im letzten Schritt 11 quasi als Zusammenstellung aller Zwischenrechnungen. Einer der entscheidendsten Punkte der Rekonstruktion von Mansfield und Wildberger ist jedoch Schritt 8. Dieser Schritt gibt keine plausible Erklärung für die Notwendigkeit der Werte in Spalte 1 der Keilschrifttafel und verschärfend wird noch in der Erläuterung zu Schritt 8 hinzugefügt, dass die Verfasser nicht glauben, dass die Werte β und δ aus der Spalte 1 errechnet wurden. Dieser einzig und allein in Anpassung an den ja objektiv gegebenen Aufbau der Keilschrifttafel eingeschobene Schritt 8, wäre ja in der reinen uns dargelegten Abfolge überhaupt nicht notwendig gewesen. Es ist klar ersichtlich das aus den gewonnenen Werten des Schritt 5, welche in 7 noch einmal sortiert werden sollen, in Schritt 9 die Werte der Spalten 2 und 3 errechnet werden sollen. Die Spalte 1 wäre hiernach ja ohne Bedeutung für die Berechnung.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das bereits seit Neugebauer und Sachs 1945 gesuchte, oder auch von Scriba /Schreiber 2001(engl.2016) eingeforderte Konstruktions- oder Berechnungs-prinzip welches Plimpton 322 zugrunde liegt, von keiner der Seiten bisher befriedigend gelöst wurde.

2. Über die trigonometrische Rechnung mit Diagonalen in altbabylonischer Zeit

„ die babylonische Diagonalenrechnung“



2P + 1 = diagonal = sec α

height of a = 1 ; applies to all values of α

Abb. 2

Die dem Winkel gegenüberliegende Seite a eines in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecks, hat die Seitenhalbierende P zum Bogen des Umkreises. In entgegengesetzter Verlängerung durch den Mittelpunkt des Kreises ergibt sich aus der Summe der einzelnen Komponenten der Durchmesser und gleichzeitig die Hypotenuse bzw. Diagonale.(orange) Hierbei verhält sich die Länge P zur Hypotenuse des Dreiecks bzw. der durch Verdopplung des Dreiecks entstandenen Diagonale des eingeschriebenen Sehnenvierecks, wie der (Durchmesser des Kreises minus die geometrische Höhe des Dreiecks zur Seite a) geteilt durch 2. $P = \frac{\sec\alpha - 1}{2}$

Die Diagonale des Steigungsdreiecks und gleichzeitig der Secans des eingeschlossen Winkels α

Ist demzufolge Diagonale = sec α = 1 + 2P

Hierbei ist 1 die für jedes beliebige Steigungsdreieck strikt festgelegte Seitenhöhe, also rechtwinklig zur Seite a durch den gegenüber liegenden Punkt A verlaufend. Im betrachteten rechtwinkligen Dreieck ist dies gleichzeitig die Basis oder auch Ankathete.

So ergeben sich ebenso, auch die weiteren heute zum Teil für den Einheitskreis ungenutzten oder ganz vergessenen Beziehungen:

$$1 = \sec\alpha - 2P$$

bzw. $$1 = \cos\alpha + 2P \times \cos\alpha$$

Zurück kommend auf das zugrunde gelegte geometrische Konstrukt fällt sofort auf, dass hierbei gemäß des Satz des Thales, zwingend ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Mit der Basis bzw. Ankathete b= 1 und der vom Steigungsverhältnis bzw. Winkel α abhängigen Länge der Diagonalen als Secans von α . Wie babylonisch nicht anders zu vermuten, wird effizient, völlig korrekt und ohne Quadrieren oder Wurzel ziehen die Berechnung der Diagonalen vollzogen.

Erst bei der Bestimmung der Weite also der sich öffnenden Seite gegenüber dem Winkel α (= Seite a) bediente man sich des Quadrierens, wie uns die Überschrift der heutigen Spalte I der Keilschrifttafel Plimpton 322, eindrucksvoll zeigt. Aus dem Quadratsecans wird so der Quadrattangens und dieser entspricht dem Quadrat der Seite a.

Das innerhalb der genutzten Konstruktion zwar errechenbar, aber nicht zwingend benötigt, auch der Sinus von α existiert ist selbstverständlich, doch die Babylonier „shrinkten“ den Kreis des eingeschrieben Dreiecks virtuell auf den Durchmesser 1 bzw. 60. Damit wurde aus der Seite a, welche dem Winkel gegenüber liegt, in dieser angepassten Konstruktion der Wert des Tangens des Winkels. Immer auf den effektivsten Nutzen bezogen, waren der Sekans als Diagonale und der Tangens als Weite bzw. Seite a, des sich öffnenden Winkels, für die Wiedergabe von Steigungsverhältnissen sicher die bevorzugten Funktionswerte der Babylonier.

Aber auch wir nutzen, da einfacher vorstellbar, den Tangens im Alltag öfter als alle anderen Funktionswerte. Ob bei der simplen Angabe von Steigungsverhältnissen einer Treppe mit einem beispielhaften Verhältnis von 1/3 (Setzstufe/ Trittstufe = GK/AK = Tangens), oder bei der Angabe der Gradiente bzw. Steigung auf Straßenschildern in Prozent, all dies entspricht dem Tangens des an der Basis anliegenden Winkels α, der sich durch das Verhältnis: Weite oder hier auch Seite a benannt / Basisseite definiert.

Die Babylonier betrachteten also und dies wie üblich, den Einheitskreis als Ganzes und nicht wie wir heute im Wesentlichen als quadrantenweise geometrische Lösung ausgehend vom Kreismittelpunkt. Das Ergebnis ist jedoch das Gleiche, denn die Proportionen bzw. Steigungsverhältnisse der Seiten zueinander bleiben gleich.

Wir sehen anhand dieser klaren durch die Babylonier aufgestellten und genutzten geometrischen Konstruktion folgendes. Zusätzlich zu den bereits genannten nach Pythagoras benannten Gesetzmäßigkeiten im rechtwinkligen Dreieck und dessen Anwendung für die trigonometrischen Funktionen im Einheitskreis, wird auch der Satz des Thales genutzt , da jeder über dem Durchmesser des Kreises gebildete Winkel ein Rechter sein muss, funktioniert die gewählte Konstruktion. Des Weiteren erkennen wir bereits die Gesetzmäßigkeiten der Chordenrechnung, denn die gegenüberliegende Seite zum Peripheriewinkel α, ist identisch mit der des doppelten Zentriwinkels (2α). (Siehe Abb.2) Was hier in der babylonischen Anwendung für den Tangens bzw. den doppelten Tangens gilt, wurde in griechischer Zeit dann, auf den im Kreis liegenden doppelten Sinus bezogen und führte so zu deren Chordenrechnung.

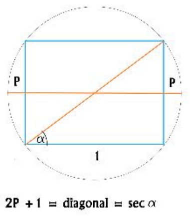
Von daher gilt ebenso und wie bekannt: $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \times \cos\alpha$

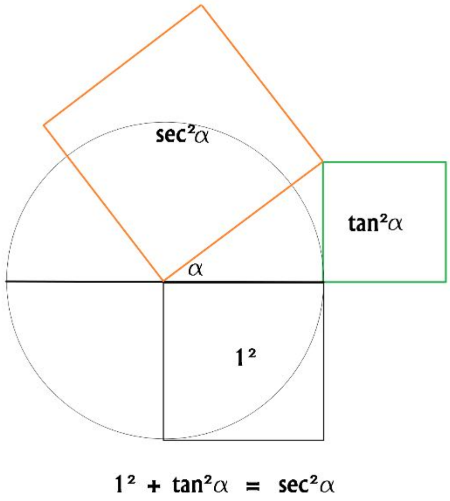
$$\mathrm{Crd}\,\alpha = 2\sin(\alpha/2)$$

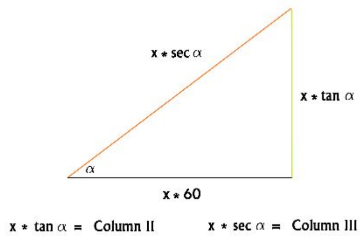
$$\text{Seite } a/2 = \sin\alpha = \text{Seite } a/\text{Diagonale } c = 2\sin\alpha/2r$$

Ohne hierauf an dieser Stelle im Detail weiter einzugehen, kann man aber auch bereits die weitere Entwicklung aus der babylonisch genutzten Konstruktion erkennen. Nach dem Herausschneiden der Pfeillänge aus dem genutzten Kreis, welche die Unterteilung in kleinere Teilsegmente mit einleitete, entwickelte sich der babylonischen Einheitskreis mit dem Durchmesser von 1. Aus der trigonometrischen Diagonalenrechnung der Babylonier in diesem Kreis, wurde durch die einmalige Verdopplung des Durchmessers jenes Einheitskreises, zuerst die griechische Chordenrechnung mit den doppelten Winkelgrößen. Daraus entstand dann die indoeuropäische heutige Trigonometrie. Diese Entwicklungsstufen sind durch stetiges Verkleinern der Bezugsdreiecke, im eigentlich seit der babylonischen Erstnutzung im Wesentlichen unveränderten Einheitskreis, klar erkennbar. (siehe Kleb 2021)

3.0 Über die Berechnungsabfolge auf Plimpton 322







	Column 0 (reconstr.)	Column I	Column II	Column III	Column IV
	[Note the doubled value, later add 1 and square this sum]	The intermediate (takiltum) is the square of the diagonal, which minus 1 becomes the square of the width	**The Result for the width**	**The Result for the diagonal**	**It´s Place**
	24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
	23.46.2.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	2
	23.6.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
	22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.9.1	4
	20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
	20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
	18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.1	7
	18.3.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
	16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
	15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.1	10
	15	1.33.45	45	1.15	11
	13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
	12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	13
	11.45.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
	10.40	1.23.13.46.40	56	1.46	15

Tabelle 1:

Plimpton 322 mit rekonstruierter Spalte vor Spalte I und dem geometrischen Konstrukt zur Erläuterung der folgenden Inhalte.

3.1 Ein kurzes Vorwort zur wiederentdeckten Berechnungsabfolge und dem zu Grunde liegenden Funktionswertesystem

Mittels der nachfolgenden Darlegungen und anhand der beigefügten Tabellen, ist für jeden die Abfolge der Berechnung für die Werte auf Plimpton 322 transparent und nachvollziehbar.

Grundlegend sollte hierbei jedoch auch beachtet werden, dass all unsere bisherige Kenntnis über das damalige Wissen nur äußerst unvollständig ist und man an die Stelle, des Zweifelns, an deren altem Wissen, die Hochachtung für dieses setzen sollte. Dies gilt auch für neue Erkenntnisse, zumal wenn diese, wie in der Mathematik üblich, wenig Raum für Spekulationen offen lassen.

Man muss also, auch wenn dies bisher nicht zur althergebrachten Denkweise gehört zur Kenntnis nehmen, dass neben dem komplexen geometrischen Vorstellungsvermögen zur Zeit der Erstellung von Plimpton 322 nicht nur die einfache Nutzung des Satz des Pythagoras bekannt war. Vielmehr und dies unterstreicht auch, aber nicht nur die Überschrift über Spalte 1 (hier in der englischen Übersetzung dieser Arbeit: *The intermediate (takiltum) is the square of the diagonal, which minus 1 becomes the square of the width*) , wurde bereits mit einem komplexen Funktionswertesystem gearbeitet. Eine der Grundlagen hierfür wird uns so, über die Eigenschaften des trigonometrischen Pythagoras direkt auf der Tafel wiedergegeben. (Im Einheitskreis gilt: Basis= $1^2 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$)
Hierbei ist die Diagonale gleich der Hypotenuse und dem Secans und der mit Weite bezeichnete Wert die dem Winkel gegenüberliegende, also sich ihm gegenüber in die „Weite öffnende" Seite des rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Tangens.
Ebenso ist nicht nur das Funktionswertesystem eindeutig nachweisbar, sondern auch seine bewusste nachfolgende Umwandlung in messbare Längen. Das dieses 3800 Jahre alte trigonometrische Funktionswertesystem unverändert zu dem heutigen ist und auch unsere heutigen Werte, ob am Rechner oder von Hand kalkuliert genau die gleichen sind, lässt sich an folgendem eindrucksvollen Beispiel stellvertretend für alle Zeilen von Plimpton 322 zeigen.

Wir schauen uns die beliebig ausgewählte Zeile 3, der Keilschrifttafel an:

Um mit dem exakten Steigungsverhältnis der Tafel zu arbeiten, nehmen wir einfach den dezimalen Zahlenwert von Spalte II und dividieren diesen durch Spalte III, so entsteht $\frac{4601}{6649}$ = 0,69198375.
Wie der Leser bereits festgestellt kann, entsprechen die in der gegebenen Reihenfolge eingesetzten Werte bzw. deren Quotient dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α. Nimmt man nun mittels Tafelwerk, oder Rechner den Winkel daraus, dieser entspricht 43,787346 Grad und bestimmt nahtlos hieraus den tanα = 0,95854166p6 und den Wert für die Umkehrfunktion von cosα den Secα = 1/ Secα = 1,385208333p3
Wir haben also bisher nichts anderes vollzogen, als die gegeben Dreiecksproportionen der altbabylonischen Keilschrifttafel zu verwenden und dieses Dreieck in unserem heutigen trigonometrischen Wertesystem festgehalten. Da sich unser Wertesystem im Einheitskreis auf einen Radius von 1 bezieht, dies zu babylonischer Zeit jedoch anders war, multiplizieren wir unsere heutigen Werte (oben errechneten Werte) mit 60 und erhalten so den bab-tanα = 57,5125 und den bab-secα = 83,1125 für die Zeile 3 von Plimpton 322.
Rufen wir uns noch einmal kurz in Erinnerung, die vor rund 3800 Jahren notierten Dreiecksseiten der Zeile 3 haben die dezimalen Werte

4601 ; 6649 ; (und für die 3. nicht genannte Seite ist dies 80x60 = 4800)

Schauen wir uns nun unsere bab-tan und bab-sec Werte als echte Brüche an, so sehen wir

bab-tan α = $\frac{4601}{80}$; bab-sec α = $\frac{6649}{80}$, man sieht das Steigungsdreieck der Zeile: 4601; 6649; (80x60=4800)

Nun könnte ein Kritiker sagen: Das Rechnen mit gleichen Zahlenwerten, muss auch zum gleichen Ergebnis führen. Jedoch sind die aufgeführten bab-tan und bab-sec Werte nicht die notierten Werte der Spalten II bzw. III, sondern sie sind das Ergebnis der Zwischenrechnung nach Spalte I und nur unsere heutige Darstellung der Dezimalzahlen, als echte Brüche erlaubt uns, die sofortige Identifikation mit den Werten der Spalten II und III. Im sexagesimalen Zahlensystem jedoch, war die Zwischen-rechnung (Quadratwurzel aus dem Wert von Spalte I) nur nach einer separaten Erweiterung mit einem gemeinsamen Faktor, in die Werte für Spalte II und III, vollständig umgeformt. Wir haben hier dem entsprechend, die unmittelbaren Zusammenhänge zwischen dem dimensionslosen Funktionswert in Spalte I und dessen Überführung mittels Erweiterung, in die dimensionsbezogenen Seitenlängen des Steigungsdreiecks in den Spalten II und III, vor uns.
Durch diese für alle Zeilen ebenso nachvollziehbare Betrachtung wird nicht nur klar, dass wir auch heute noch ein verwandtes geometrisches Konstrukt für unser trigonometrisches Funktionswertesystem benutzen, sondern die damaligen Werte genauso exakt, wie unsere heutigen, sind.

Ebenso sind alle scheinbar willkürlichen Werte für die Seitenlängen der Spalten II und III, auch in unseren heutigen dazu passenden Funktionswerten enthalten, wenn wir diese nur zur Basis 60 nehmen und sie als echte Brüche darstellen. Siehe hierzu die nachfolgende Tabelle 2.

3.2 Tabelle 2: Plimpton 322 in dezimaler Schreibweise inkl. der Zwischenrechnungen

	Column 0 (reconstr.)	Column I	Reading and/or interim calculation		Column II	Reading and/or interim calculation		Column III	Column IV	
	[Note the doubled value, later add 1$ and square this sum]	The intermediate (takiltum) is the square of the diagonal, which minus 1 becomes the square of the width	Square root of Column I minus 1 & The Result is bab-tan α function value (to base 60)		The Result for the width	Square root of Column I direct & The Result is bab-sec α function value (to base 60)		The Result for the diagonal	It´s Place	Multiplier of the base side x 60
	24,5	3600 x 1,983402p7	59,5 {59,5 x 2 = 119}	$\frac{119}{2}$	119	84,5 { 84,5 x 2 = 169 }	$\frac{169}{2}$	169	1	2 x 60 = 120
	23,76736p1	3600 x 1,949158552088 *	58,45486p1 {58,45486p1 x 288 =16835}	$\frac{16835}{288}$	[16835] : 5 3367	83,76736p1 {83,76736p1 x 288 = 24125}	$\frac{24125}{288}$	[24125] : 5 4825 [1]	2	[288 x 60] : 5 57,6 x60 = 3456
	23,1125	3600 x 1,918802126736p1	57,5125 {57,5125 x 80 = 4601}	$\frac{4601}{80}$	4601	83,1125 {83,1125 x 80 = 6649}	$\frac{6649}{80}$	6649	3	80 x 60 = 4800
	22,40p4	3600 x 1,886247906721 *	56,48p4 {56,48p4 x 225 = 12709}	$\frac{12709}{225}$	12709	82,40p4 {82,40p4 x 225 = 18541}	$\frac{18541}{225}$	18541	4	225 x 60 =13500
	20,8p3	3600 x 1,815007716049 *	54,1p6 {54,1p6 x 6 = 325}	$\frac{325}{6}$	[325] : 5 65	80,8p3 {80,8p3 x 6 =485}	$\frac{485}{6}$	[485] : 5 97	5	[6 x 60] : 5 1,12 x 60 = 72
	20,1p6	3600 x 1,785192901234 *	53,1p6 {53,1p6 x 6 = 319}	$\frac{319}{6}$	319	80,1p6 {80,1p6 x 6 =481}	$\frac{481}{6}$	481	6	6 x 60 = 360
	18,6p8	3600 x 1,719983676268 *	50,9p1 {50,9p1 x 45 = 2291}	$\frac{2291}{45}$	2291	78,6p8 {78,6p8 x 45 = 3541}	$\frac{3541}{45}$	3541	7	45 x 60 = 2700
	18,0625	3600 x 1,692709418402p7 [1]	49,9375 {49,9375 x 16 = 799}	$\frac{799}{16}$	799	78,0625 {78,0625 x 16 = 1249}	$\frac{1249}{16}$	1249	8	16 x 60 = 960
	16,9	3600 x 1,642669p4	48,1 {48,1 x10 =481}	$\frac{481}{10}$	481 [1]	76,9 {76,9 x 10 = 769}	$\frac{769}{10}$	769	9	10 x 60 = 600
	15,56p481	3600 x 1,586122566110 *	45,935p185 {45,935p185 x 108 = 4961}	$\frac{4961}{108}$	4961	75,56p481 {75,56p481 x 108 = 8161}	$\frac{8161}{108}$	8161	10	108 x 60 = 6480
	15	3600 x 1,5625	45 {45 x 1 = 45}	$\frac{45}{1}$	45	75 {75 x 1 = 75}	$\frac{75}{1}$	75	11	1 x 60 = 60
	13,225	3600 x 1,4894168402p7	41,975 {41,975 x 40 = 1679}	$\frac{1679}{40}$	1679	73,225 {73,225 x 40 = 2929}	$\frac{2929}{40}$	2929	12	40 x 60 = 2400
	12,25	3600 x 1,45001736p1	40,25 {40,25 x 4 = 161}	$\frac{161}{4}$	161 [1]	72,25 {72,25 x 4 = 289}	$\frac{289}{4}$	289	13	4 x 60 = 240
	11.7p5	3600 x 1,43023882030 *	39,3p5 {39,3p5 x 45 = 1771}	$\frac{1771}{45}$	1771	71,7p5 {71,7p5 x 45 = 3229}	$\frac{3229}{45}$	3229	14	45 x 60 = 2700
	10,66p6	3600 x 1,3871604938 *	37,33p3 {37,33p3 x 3 = 112}	$\frac{112}{3}$	[112] : 2 56	70,66p6 {70,66p6 x 3 = 212}	$\frac{212}{3}$	[212] : 2 106 [1]	15	[3 x 60] : 2 1,5 x 60 = 90

brown = reconstructed part of Plimpton 322
green = interim calculation not at the tablet
white = Values of Plimpton 322 (corrected)
grey = column just for explanation ,this values were not at Plimpton 322
blue backlighted Heading = description for trigonometric function values (column I)
black backlighted Heading = Results or real Length

*abbreviated Number [1] corrected Number [...] initial values prior reducing {...} calculation just for explanation
$ for working with decimal Numbers ,we have to add 60 instead of one
& for working with decimal Numbers, we have to know that the sqrt Values in the babylonian system, are at base 60 instead of 1, otherwise the function Values for tangent α and secant α are the same like our Values, multiplied by 60

For Line 15: the triple 28 ; 53 ; 45 is also valid

3.3 Die Berechnungsabfolge im Detail

Man bestimmt den Pfeil des Steigungsdreiecks und notiert diesen in Spalte 0 (heute nicht mehr existent) Es ist plausibel, dass die Spaltenüberschrift folgendermaßen aussah: notiere den doppelten Wert, füge später 1.0.0 hinzu und erstelle das Quadrat dieser Summe. In Spalte I findet sich nun das in Spalte 0 „geforderte" Zwischenergebnis (Ta-ki-il-tum, Ta-ki-il-ti ;pl.). Die Überschrift lautet so: Die Zwischenergebnisse sind die Quadrate der Diagonalen (zum gemessenen Steigungsverhältnis), dieses minus 1 wird zum Quadrat der Weite (Öffnung des Dreiecks). Dies entspricht dem sogenannten 2. trigonometrischer Pythagoras und gibt so den Hinweis wiederum den Hinweis zur weiteren Berechnungsabfolge.

Anm: Der Pfeil ist die Mittelsenkrechte der Sehne zum dazugehörigen Bogensegment. Der zwischen den beiden Kreisradien in diesem Fall gleich dem Secans liegende Winkel gegenüber der Sehne hat die Größe von 2α. Im heutigen Sprachgebrauch wird der Pfeil, auch als Stich der Sehne zum durch diese begrenzten Bogenabschnitt bezeichnet. Die Verwendung des Pfeilwertes in Verbindung mit einem Steigungsverhältnis ist auch bei anderen Keilschrifttafeln belegbar Ebenso wird es in der Form 2P+1 = Diagonale bzw. Durchmesser mehrfach verwendet. (unter anderen BM 085194,CDLI No: P274707 Aufgabe r i33 und r i39.)

Das Ergebnis in Spalte II entsteht aus Spalte I, minus den Wert von 1 (entsprechend der Überschrift und trigonometrischen Pythagoras) und anschließendem Wurzel ziehen. Hieraus ergibt sich die Weite (Tangens) im Einheitskreis. Der gewonnene Ablesewert, wird zur weiteren Übernahme und Darstellbarkeit auf Ganzzahlen erweitert. Die zuvor erwähnten Wurzelwerte wurden mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit aus Tabellen herausgelesen, so dass dieses Zwischenergebnis auch nicht auf der Tafel notiert werden musste, gleichzeitig wurden so in typisch babylonischer Manier auch gleich eventuelle Rechen oder Schreibfehler ausgefiltert und gingen nicht in die folgenden Schritte mit ein. (Siehe: Fehlerquellen)

Die Erweiterung des Ablesewertes geschieht bei dem so entstandenen Wert im Dezimalen durch Erweitern mit dem Nenner. Im babylonischen also Sexagesimalen erfolgte dies durch eine Erweiterung mit dem Reziproken, eines gemeinsam enthaltenen Faktors im Anteil des Wertes hinter der 1. Sexagesimalen Stelle.

Das Ergebnis in Spalte III entsteht durch das direkte Wurzel ziehen, des Wertes von Spalte I. Eventuell wurde auch bereits im Vorab, also bei Schritt 1 oben, der Zwischenwert vor dem Quadrieren als Zwischenrechnung extern notiert und entsprechend erweitert. (siehe: Fehlerquellen)
Hieraus ergibt sich in jedem Fall die Diagonale (Sekans) also die Hypotenuse des entstehenden Dreiecks im Einheitskreis. Auch wird zur weiteren Übernahme und Darstellbarkeit mit dem gleichen Nenner wie in Spalte II, im Dezimalen leicht erkennbar, erweitert. Im Sexagesimalen ergibt sich der gleiche Faktor wie in Spalte 2 und dessen Reziprokes zur Erweiterung aus den Anteilen des Gesamtwertes hinter dem 2. Sexagesimalpaar.

Die Erweiterung mit diesem gemeinsamen Reziproken, ergibt hiernach die dargestellten Werte der Spalten II und III. Diese Zahlenwerte sind durch die Erweiterung von der strikten Teilung in 60iger Potenzen als nun niedergeschriebene Ganzzahl befreit.
Der Reziproke Zahlenwert ist hierbei bedingungsgemäß und als Multiplikator für alle 3 Seiten des jeweiligen Steigungsdreiecks, immer auch identisch mit dem Wert der Basiskathete des Dreiecks in sexagesimaler Schreibweise. (hier wird das Grundmaß 1= 60 nicht extra notiert und wir sehen nur den Multiplikator)

Aus diesem Grund war der Wert aus babylonischer Sicht auch nicht nennenswert, da in beiden anderen Dreiecksseiten als Faktor ohnehin bereits enthalten.

Zum letzten Abschnitt der Vorgehensweise kann noch folgendes zusätzlich präzisiert werden: Der babylonische Verfasser kannte das geometrische Konstrukt, welches seinen Berechnungen zugrunde lag, sehr genau und konnte wenn es denn benötigt würde diese Basiskathete bzw. 3. Seite jederzeit herauslesen. In vielen Zeilen von Plimpton 322, kann man so sofort den Anteil des heute als Externsecans bekannten, bzw. im babylonischen den Pfeilwert beschreibenden Werteanteils multipliziert mit dem gemeinsamen Faktor, einfach vom Diagonalen-Wert der Spalte III abziehen. Man erhielt so bei Bedarf den Wert der Basis, welche ja immer auch ein ganzzahliges Vielfaches von 60 sein musste. Zur besseren Übersicht war auch initial deshalb kein nachträgliches Kürzen der Dreieckswerte unterhalb von Basis 1=60 angedacht. (weiteres Siehe: Fehlerquellen)
Zum Weiteren hätte man zur Kontrolle immer die Möglichkeit über die
übliche aber grobe babylonische Näherung: Diag. $\sim$ Basis + Weite^2 / 2 x Basis ,
oder über das korrekte Ausrechnen, mittels: Diagonale = $\sqrt{}$ Basis^2+ Weite^2 (Pythagoras)
für die Bestimmung der dritten Dreiecksseite gehabt.
Für die Darstellbarkeit, oder weitere Maßstabsunabhängige Nutzung war die Basisseite aber nicht notwendig.

3.4 Tabelle 3: Plimpton 322 in sexagesimaler Schreibweise inkl. der Zwischenrechnungen

	Column 0 (reconstr.)	Column I	Reading and/or interim calculation	<<< >>>	Reading and/or interim calculation	Column II	Column III	Column IV	
other value	[Note the doubled value, later add 1 and square this sum]	The intermediate (takiltum) is the square of the diagonal, which minus 1 becomes the square of the width	Square root of Column I minus 1 The interim result is bab - tan α function value multiplied with the reciprocal of the common factor	The common factor ———— and its reciprocal	Square root of Column I direct. The interim result is bab - sec α function value multiplied with the reciprocal of the common factor	The Result for the width	The Result for the diagonal	It´s Place	Multiplier of the base side x 60
	24.30	1.59.00.15	59.30 {59.30 x **2** = 1.59}	30 **2**	1.24.30 {1.24.30 x **2** = 2.49}	1.59	2.49	1	**2**
	23.46.2.30	1.56.56.58.14.50.06.15	58.27.17.30 {58.27.17.30 x **4.48** = 4.40.35}	12.30 **4.48**	1.23.46.2.30 {1.23.46.2.30 x **4.48** = 6.42.05}	[4.40.35] : 5 56.07	[6.42.05] : 5 1.20.25	2	**[4.48]** : 5 57.36
	23.6.45	1.55.07.41.15.33.45	57.30,45 {57.30.45 x **1.20** = 1.16.41}	45 **1.20**	1.23.06.45 {1.23.06.45 x **1.20** = 1.50.49}	1.16.41	1.50.49	3	**1.20**
	22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	56.29.04 {56.29.04 x **3.45** = 3.31.49}	16 **3.45**	1.22.24.16 {1.22.24.16 x **3.45**= 5.9.1}	3.31.49	5.09.01	4	**3.45**
	20.50	1.48.54.01.40	54.10 {54.10 x **6** = 5.25}	10 **6**	1.20.50 {1.20.50 x **6** = 8.05}	[5.25] : 5 1.05	[8.05] : 5 1.37	5	**[6]** : 5 1.12
	20.10	1.47.06.41.40	53.10 {53.10 x **6** = 5.19}	10 **6**	1.20.10 {1.20.10 x **6** = 8.01}	5.19	8.01	6	**6**
	18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	50.54.40 {50.54.40 x **45** = 38.11}	1.20 **45**	1.18.41.20 {1.18.41.20 x **45** = 59.01}	38.11	59.01	7	**45**
	18.3.45	1.41.33.45.14.03.45	49.56.15 {49.56.15 x **16** = 13.19}	3.45 **16**	1.18.3.45 {1.18.3.45 x **16** = 20.49}	13.19	20.49	8	**16**
	16.54	1.38.33.36.36	48.06 {48.06 x**10** =8.01}	6 **10**	1.16.54 {1.16.54 x **10** = 12.49}	8.01	12.49	9	**10**
	15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	45.56.6.40 {45.56.6.40 x **1.48** = 1.22.41}	33.20 **1.48**	1.15.33.53.20 {1.15.33.53.20 x **1.48** = 2.16.1}	1.22.41	2.16. 1	10	**1.48**
	15	1.33.45	45 {45 x **1** = 45}	1 **1**	1.15 {1.15 x **1** = 1.15}	45	1.15	11	**1**
	13.13.30	1.29.21.54.02.15	41.58.30 {41.58.30 x **40** = 27.59}	1.30 **40**	1.13.13.30 {1.13.13.30 x **40** = 48.49}	27.59	48.49	12	**40**
	12.15	1.27.00.03.45	40.15 {40.15 x **4** = 2.41}	15 **4**	1.12.15 {1.12.15 x **4** = 4.49}	2.41	4.49	13	**4**
	11.45.20	1.25.48.51.35.06.40	39.21.20 {39.21.20 x **45** = 29.31}	1.20 **45**	1.11.45.20 {1.11.45.20 x **45** = 53.49}	29.31	53.49	14	**45**
	10.40	1.23.13.46.40	37.20 {37.20 x **3** = 1.52}	20 **3**	1.10.40 {1.10.40 x **3** = 3.32}	[1.52] : 2 56	[3.32] : 2 1.46	15	**[3]** : 2 1.30

brown = reconstructed part of Plimpton 322 with possible Heading
green = interim calculation not at the tablet
white = Values of Plimpton 322 (corrected)
grey = column just for explanation ,this values were not at Plimpton 322
blue backlighted Heading = description for trigonometric function values (column I)
black backlighted Heading = Results or real Length

[1] corrected Number [...] initial values prior reducing {...} calculation just for explanation

For Line 15: the triple 28 ; 53 ; 45 is also valid

3.5 Aus der rekonstruierten Berechnungsabfolge ergeben sich noch folgende Randbedingungen:

I. Der Definitionsbereich der Berechnungsabfolge ist gültig, entsprechend der gegebenen Überschrift in Spalte I für rechtwinklige Dreiecke mit einem Steigungswinkel α zwischen 0° und ~ 82,55°. Danach übersteigt der Secans² die nächste 60iger Potenz und die Anweisung über Spalte I wäre ab hier unpräzise.
II. Für das korrekte Steigungsdreieck und dessen Verhältnisse, muss auch für Spalte III mit dem gleichen Faktor von Spalte II erweitert werden. (siehe: Fehlerquellen)
III. Die Ergebnisse der Spalten II und III können durch nachträgliches Kürzen noch einmal Verkleinert werden, doch auch hierbei ist strikt darauf zu achten, das für beide Werte der Spalten II und III mit dem gleichen Divisor gekürzt wird.
Ein Kürzen ist nur durch 2 bzw. 4 zulässig, wenn beide errechneten Dreiecksseiten mit einer geraden sexagesimalen Stelle enden.
Ein Kürzen durch 3 ist nur zulässig, wenn die letzte Sexagesimale Stelle der Dreiecksseiten auf 3 oder 7 endet, oder in wenigen Fällen eine Seite bereits eine Ganzzahl ist (auch im Wechsel)
Ein Kürzen durch 5 bzw. ggf. dessen Vielfaches ist nur zulässig, wenn die letzte sexagesimale Stelle beider Werte auf 5 oder vollen Zehnern endet.
(Siehe: Fehlerquellen)
IV. Gibt es für die durch Wurzel ziehen entstandenen Zwischenwerte für Spalte II und III keine Sexagesimalen Stellen hinter dem 1. bzw. 2. Paar, so ist der Faktor 1.
Es handelt sich, wie auch bei den gleichen dezimal geschriebenen Zahlenwerten klar ersichtlich bereits um ganze Zahlen.
V. Da die sexagesimale Schreibweise keine echten Brüche im heutigen Sinne kennt, wird dort statt mit dem Nenner im Dezimalen, mit dem Reziproken des gemeinsamen Faktors des Wertepaares multipliziert. Diese Vorgehensweise um eine Division zu Vermeiden ist nicht nur üblich, sondern auch in zahllosen anderen Beispielen nachgewiesen.

Ergänzend zur oben genannten Randbedingung III. kann folgende wichtige Aussage getroffen werden: Das Kürzen der Zeilen 2, 5 und 15 ist plausibel als separater Schritt erst nach der Erweiterung mit dem reziproken Faktor erfolgt. In Zeile 15 ist so zum Beispiel klar erkenntlich, dass der eigentliche gemeinsame Faktor der Werte 37.20 und 1.10.40 gleich 20, reziprok 3 ist. Danach jedoch fehlerhaft einmal durch 2 und einmal durch 4 gekürzt wurde. Dagegen schließt sich die Wahl eines initialen Erweiterungsfaktors von 1.30 bzw. 45 bei den gegebenen Ausgangswerten nach dem Wurzel ziehen der Logik gemäß aus.

3.6 Kurzzusammenfassung der Berechnungsmethode

Erstmals konnte hiermit die komplette Berechnungsabfolge von Plimpton 322 konsistent dargelegt werden. Gleichzeitig wurde ein komplex dahinter liegendes System für die Erfassung und Dokumentation von Steigungsdreiecken sichtbar.

Wir haben es dementsprechend bei der angewandten Diagonalenrechnung der Babylonier mit einem dimensionslosen Verhältnis- bzw. Funktionswerte-system zu tun. Diese Verhältniswerte wurden erst durch Multiplikation mit einem real existierenden Längenmaß in der Realität einsetzbar. Hierzu gibt es in der Literatur zu anderen aufgefunden Keilschrifttafeln auch bereits entsprechende weitere Hinweise, welche sich nun im Gesamtkontext noch besser deuten lassen. (YBC7289; SI.427 etc.)

Da der zuvor bestimmte Funktionswert, der zudem noch in starren 60er Potenzen zueinander vorliegt, durch das Erweitern in Ganzzahlen flexibel nutzbar wurde, schuf diese Umformung, eine darstellbare immer auf eine kleinste Einheit bezogene, real messbare Länge. So hatten auch Längensysteme mit gemischten Faktoren zwischen den Einheiten, wie Sie in babylonischer Zeit üblich waren und auch heute noch im Imperial/englischen Maßsystem verwendet werden, keine Probleme mehr mit der Darstellung der Steigungsdreiecke. Dabei war es dann unwichtig, ob diese kleinste Einheit ein Finger, ein Cubit, oder vielleicht 1/6 eines Fingers, oder letztendlich sogar ein maßstäblich noch Kleinerer war. In allen Fällen sind die Proportionen der Seiten zueinander gleich.

Auch wenn es die babylonischen Erfinder noch auf etwas andere Art und Weise nutzten, müssen auch wir heute die Reallänge mit dem Verhältnisfaktor bzw. Funktionswert des Winkels multiplizieren um die jeweilige Dreiecksseite zu errechnen.
Es ist also trotz der durch die Rechenmethodik vorgegebenen Einschränkungen, (Man beschränkte sich zu diesem Zeitpunkt auf spezielle endliche und auch periodisch endende Funktionswerte.) von einem N-Eck mit ca. 600 Seiten für den Vollkreis ausgehen. Dies entspricht einer Abstufung der Steigungsdreiecke von mindestens 150 Stufen für einen Viertelkreis. Aufgrund des zugrunde liegenden geometrischen Konstrukts, ist es als der reale Vorgänger der späteren griechischen Sehnenrechnung und unserer heutigen trigonometrischen Funktionen anzusehen.

3.7 weitere Schlussfolgerungen, Fragen und Antworten

Aus der Abfolge der Berechnung ergeben sich noch weitere Fragen, welche im Weiteren beantwortet werden sollen.

- Wenn es sich doch um ein komplettes Funktionswertesystem handelt, gibt es dann auch weitere Tripel entsprechend der auf Plimpton 322 verwandten Berechnungsabfolge?

Ja, weit über den auf Plimpton 322 abgebildeten, oder auch in der bisherigen Wissenschaftsliteratur diskutierten Bereich von rund 38 Zeilen, gibt es nachweislich (Kleb 2020,2021) mehr als 230 weitere Zeilen für den im Definitionsbereich liegenden Steigungsbereich zwischen 0 und 82°.
Man kann Aufgrund der Anzahl der sexagesimalen Stellen vermuten, dass nur ein Teil davon genutzt wurde, es aber mindestens 150 Steigungsdreiecke im genannten Bereich gab.
Ebenso lässt sich nachvollziehen, dass für wichtige Verhältnisse wie 1:1 entsprechend 45° auch Approximationen mit einbezogen wurden. So finden wir auf YBC 7289 nicht nur die Näherung für Wurzel 2 entsprechend 1.24.51.10, sondern dies ist gleichzeitig der Funktionswert des Sekans α, welcher durch Multiplikation mit der Seitenlänge 30 und so in Kenntnis, aber ohne Nutzung des Satz des Pythagoras, in die Reallänge 42.25.35 umgewandelt wird. Auf unsere Keilschrifttafel Plimpton 322 bezogen, hätte sich demnach das Steigungsverhältnis 1:1 entsprechend 45,00° als

Spalte I:	Spalte II:	Spalte III:	
1.59.59.59.38.1.40 ~ 2.0 59.59.59.38.1.40 ~ 1.0	Weite = 6	Diagonale = 8.29.7	(zur Basis = 6)

dargestellt.

Ein Kürzen wäre hierbei auch möglich gewesen, jedoch verkleinern sich die Zahlenwerte dadurch nicht mehr. Zusätzlich wird deutlich, Plimpton 322 bildet nur einen sehr begrenzten und speziell ausgewählten Abschnitt von gültigen Steigungsdreiecken ab. Wenn ein anderes, als das Beginnende in Zeile 1, hätte dokumentiert werden sollen, so hätten die akribischen babylonischen Mathematiker auch ein solches gewählt. Dies unterstreicht auch nochmals die spezielle Funktion der notierten Zeilen.

- Eine weitere Frage die sich unweigerlich und gerade in Anbetracht der seit über 75 Jahren währenden Lösungsversuche ergibt, ist: War nicht doch die Erstellung von pythagoreischen Tripeln bzw. explizit sogar deren primitiven Varianten die eigentliche Absicht der Schreiber von Plimpton 322?

Nein, denn hier handelt es sich nachweislich (siehe geometrische Erläuterung und die Geometrische Darstellung der beigefügten Tabelle) nicht nur um die allgemein genutzten Gesetzmäßigkeiten, gemäß des Satz des Pythagoras, sondern um eine daraus abgeleitete wesentlich komplexere Variante der Gleichung. Ebenso handelt es sich nicht um die Absicht pythagoreische Tripel mittels der Tabelle festzuhalten, der nachweisbare Rechenschritt des Erweiterns schließt dies aus, denn im Prinzip ist jede sexagesimale Zahl also bereits die jeweiligen Funktionswerte, ja in dezimaler Schreibweise, je nach Ansatz der ersten 60iger Potenz eine, wenn dann auch größere Ganzzahl. Eine zusätzliche Erweiterung wäre hierfür nicht notwendig gewesen.
Das heißt im Umkehrschluss ebenso, dass alle im Verhältnis eines rechtwinkligen Dreiecks zueinander stehenden Seiten, im Sexagesimalen auch pythagoreische Dreiecke sind.
Ebenso ist eine rein mathematisch / theoretische Begründung für die Erstellung der Keilschrifttafel klar zu verneinen.
Obwohl die Zeile 15 durch die fehlerhafte Kürzung missglückte, wird doch sowohl aus Zeile 11, wie jener Zeile 15 deutlich, dass es dem Verfasser nicht um die maximal mögliche mathematische Kürzung der Werte ging. Wenn möglich vermied er so auch, dass die Basisseite des rechtwinkligen Dreiecks unter 1 = 60 gekürzt wurde. Dies weißt eher auf einen geometrischen und beabsichtigten darstellbaren Aspekt, der festgehaltenen Tripel hin. Die absolute Größe der entstandenen Dreiecke, war hierbei absolut nicht entscheidend, solang die Verhältnisse gewahrt bleiben.

- Warum haben die auf Plimpton 322 enthaltenen Steigungsdreiecke auch manchmal größere Abstufungen als im Mittel, gab es hierfür vielleicht keine passenden Tripel? Dies würde ja gegen eine systematische Anwendung von Funktionswerten sprechen!

Nein, es gibt nachweislich nicht nur oberhalb und unterhalb des Wertebereichs von Zeile 1 oder 15 gültige Tripel, sondern auch in den größeren Sprüngen dazwischen (manchmal sogar Mehrere). So zum Beispiel zwischen den Zeilen 9 und 10, 11 und 12 oder auch 14 und 15. Ob diese aus Sicht der Darstellung in diesem Fall nicht ausgewählt wurden, oder objektiv einfach für den Inhalt dieser Tafel keine Relevanz hatten, ist plausibel erklärbar, würde hier jedoch den Umfang dieser Erarbeitung sprengen. Man kann aber in Analyse der Spaltenverhältnisse davon ausgehen, dass wenn es notwendig gewesen wäre, der babylonische Schreiber statt der in Zeile 10 vorhandenen 9 Sexagesimalen Stellen, oder der in Zeile 2 vorhandenen 8 sexagesimalen Stellen, auch maximal 10-11 Stellen hätte notieren können.

- War Plimpton 322 nicht vielleicht dennoch eine Schulaufgabe, oder ein Hilfsmittel für einen Lehrer zum Erlernen solcher Steigungsverhältnisse, wie sie nun nachweislich sogar in verschiedenen Formen bzw. Werten auf der Tafel enthalten sind?

Nein, weshalb beginnen die Winkel erst bei 44,76 Grad und nicht bei viel einprägsameren Steigungsverhältnissen, so beispielhaft auch unter 53,13°, welches ein Tripel von 1.20 ; 1.40 ; (1) gebildet hätte und nach der gleichen Vorschrift errechnet worden wär. Nach diesem Verhältnis wurden ja nachweislich nicht nur in der mesopotamischen Region viele Bauwerke errichtet. Dabei wäre es bei Steigungen über 1:1 nur zum automatischen Wechsel des kurzen und längeren Dreiecksschenkels gekommen, diese hätten jedoch ebenso selbstverständlich und analog wie die vorhandenen Wertepaare berechnet werden können und hätten das zugrunde liegende geometrische Konstrukt im Verständnis gefördert. Weshalb sollten sich Rechenaufgaben für Schüler nur auf eng gestaffelte, stetig kleiner werdende Werte und Winkel beziehen?

Für das Erlernen von üblichen Verhältnissen oder deren Anwendung als übliche Baumaße mit Winkeln von exakt 30, 45 , 60 oder 90 Grad bzw. üblichen Steigungen von 1:2 entsprechend 26,56° etc. waren keine komplex zu berechnenden Tripel notwendig, oder in anderen Fällen auch keine kleinen ganzzahligen Seitenlängen möglich. Dies lässt sich am einfachsten zum Beispiel durch die überall genutzte Setzwaage mit Lot und gleichschenkligem Dreieck belegen.

- Und hier als vorerst letzte Fragestellung, ist die Anzahl der enthaltenen mathematischen Fehler auf der Keilschrifttafel, nicht ein klares Indiz für die Arbeit eines Schülers?

Auch, diese Frage muss man klar mit Nein beantworten, denn wie die hier ebenfalls vorgestellte Analyse der Fehlerquellen klar belegt, ist ein Großteil der Fehler erst bei einer eigentlich nicht notwendigen Rechenoperation entstanden. Diese wurden zusätzlich mit hoher Wahrscheinlichkeit als Kopfrechnung und nachweislich und wiederum erschwerend je Zeile mit Zeitversatz zwischen den Spalten errechnet. Ebenso kann man davon ausgehen, dass der babylonische Schreiber sicherlich unter einem gewissen Zeitdruck stand und man ggf. auch schlechte oder ungünstige Lichtverhältnisse beim Schreiben hatte. Prägnant ist jedoch, dass man ein komplexes Wissen über die zugrunde liegende Geometrie und Mathematik haben musste um die notwendigen Operationen auszuführen. So entspricht es der babylonischen Denkweise, dass für jeden Wert auch Kontrollen eingebaut waren.

Dies wusste der Verfasser der Tafel, denn auch unabhängig von der heute nicht mehr existierenden Spalte 0, konnte mit nur einem einzigen Wert der jeweils anderen Spalten der korrekte Wert der jeweils anderen jederzeit und durch jeden rekonstruiert werden. Er hatte also abzuwägen, zwischen Schnelligkeit mit Möglichkeit zur späteren Kontrolle und einer kompletten Fehlerfreiheit. So konnten spätestens beim Auftragen, oder dem wieder Ausrichten des betreffenden Steigungsdreiecks ggf. Fehler korrigiert werden und so der Zeilenwert definitiv nicht verloren gehen.

Hierzu möchte ich darauf verweisen, dass es bereits klare Belege für die Gründe der Erstellung von Plimpton 322 gibt, diese jedoch Bestandteil einer weiteren Arbeit sein werden.

3.8 Analyse der Fehlerquellen auf Plimpton 322

Von vielen Seiten der Wissenschaft wurde sich über die Jahre hinweg den verschiedenen Fehlern auf der Keilschrifttafel gewidmet. Einige davon ließen sich bereits plausibel erklären, bei anderen gelang das nicht. Scriba und Schreiber (2002 S21) fassten dies für Zeile 2 der Keilschrifttafel folgendermaßen zusammen: *„Eine Erklärung dieses Fehlers könnte vielleicht einmal helfen, das Konstruktionsprinzip aufzudecken.“*

Zeile 2:
Dieser Fehler ist zugleich der komplexeste, doch es lässt sich folgendes festhalten. Entsprechend der babylonischen Berechnung ergaben sich für Zeile 2 ursprünglich die Werte:
in Spalte II, der Weite, im Dezimalen 16835 bzw. Sexagesimal 4.40.35 und für Spalte III, der Diagonalen der gleichen Zeile, 24125 bzw. 6.42.05.

Erst jetzt und als eigentlich unnötigen und zusätzlichen letzten Schritt, der auch nur in einigen Zeilen möglich war, wurden diese Werte noch einmal durch den babylonischen Schreiber gekürzt. Hierbei waren jedoch gewisse Regeln einzuhalten, wenn beide Werte (Weite und Diagonale) auf 5 endeten, konnte Bedingungsgemäß nur durch 5 bzw. ggf. das Mehrfache von 5, gekürzt werden.

Die kurze Rechnung die zwischen Spalte I und II als Kopfrechnung, oder mittels anderer Schreibtafel erfolgte, ist uns leider nicht erhalten. Durch die gegebene letzte 60er Potenz bestand nur die Möglichkeit zur Kürzung durch 5, dementsprechend wurde der Wert der Höhe bzw. Weite in Spalte II, korrekt durch 5 geteilt. Es muss nochmals und als wichtige Ergänzung dazu gesagt werden, dass es auch an anderen Zeilen plausibel darstellbar ist, dass die Zeilen nur Spaltenweise und somit mit einem gewissen zeitlichen Versatz und unabhängig errechnet worden sind. Hierdurch bestand jedoch die Gefahr, dass der eigentlich direkt danebenstehende Zahlenwert, der auch als Anhalts- und Kontrollpunkt dienen konnte, nicht oder noch nicht vorhanden war.

Beim Diagonalenwert der Spalte III ,Zeile 2, kann man davon ausgehen, dass der korrekte ungekürzte Längenwert 6.42.5 auf der Schreibtafel der Zwischenrechnung festgehalten wurde, dieser jedoch vermutlich aufgrund schlechten Lichtes, oder undeutlicher Schreibweise statt der ähnlichen 5 mit 2 vertikalen Strichen, als 2, bestehend aus ebenso 2 Vertikalen gedeutet wurde. So entstand zum Kürzen folgender Zahlenwert aus korrekten 6.42.5, wurde fälschlich 6.42.2. Alternativ wäre auch eventuell noch eine doppelt fehlerhafte Lesung von 6.44.2 vorstellbar.

Hierdurch, und dies ist eine weitere Regel, konnte bei einer geraden Zahl am Ende, durch 2 oder ggf. auch durch 4 etc. gekürzt werden.

Insgesamt haben wir es hier also mit einem mindestens 2stufigen Fehler zu tun, da die Existenz eines zweiten 10er Hakens nicht gesichert ist, sind die ersten beiden Erklärungen die plausibelsten.

Da das Kürzen durch 2 sicher im Kopf durchgeführt wurde, gibt es nur 2 logische Erklärungen zur ersten genannten Zahl.

Entweder er verdrehte gedanklich die ohnehin schon entstellte Zahl 6.42.2 zu 6.24.2 und kürzte dies durch 2 zu 3.12.1. Diese Zahl ist heute auch auf der Tafel in Spalte III der Zeile 2 sichtbar. Eine solche verdrehte Zahl im Kopf, kennt selbst jeder mit täglicher Mathematik Vertraute gut.

Oder er kürzte 6.42.2 korrekt und erhielt 3.21.1, welches er dann jedoch fehlerhaft notierte.

Alternativ ergäbe sich bei einem korrekt durch 2 geteilten Wert von 6.44.2 der Sexagesimale Wert von 3.22.1. Da es sich bei Zeile 2 der Keilschrifttafel um die schmalste Zeile der gesamten Tabelle handelt und zumindest auf den derzeitig zur Verfügung stehenden Abbildungen ein zweiter undeutlicher Zehnerhaken vor dem anderen nicht zu 100% auszuschließen ist, ist auch diese mögliche Erklärung hier zu erwähnen.

Eine letzte, hier zumindest anzusprechende Erklärung, schließt sich jedoch eigentlich sofort aus.

Hätte der Verfasser trotz nicht vorgesehener Kürzung durch 2 den korrekten Wert 6.42.5 halbiert, wäre 3.21.2.30 entstanden. Um hierbei zum notierten Wert 3.12.1 zu gelangen, hätten dann jedoch noch mehr Fehler gemacht werden müssen, als bei den Erklärungen zuvor.

Die Korrekten Werte des Steigungsdreiecks der Zeile 2 heißen dem gemäß:

4.40.35 (16835) ; 6.42.5 (24125) ; 4.48 (288x60=17280),
erst durch 5 gekürzt ist dies 56.07 (3367); 1.20.25 (4825) ; 57.36 (3456)

Auf den vermeintlichen Fehler in Spalte I möchte ich hier nicht weiter eingehen, da es sich dabei „nur“ um ein zu enges Schreiben zwischen der 6. und 7. Sexagesimalen Stelle handelt. Ein fehlerhaftes zusammenziehen von 50 und 6 wäre dem babylonischen Verfasser bereits beim direkt folgenden Berechnungsschritt des Wurzel Ziehens bzw. dem Ablesen aus einer Wurzelwerttabelle aufgefallen. (siehe auch in diesem Abschnitt Zeile 8)

Zeile 5:
Diese Zeile enthält keine Fehler, doch es soll angemerkt werden, dass die auf der Tafel enthaltenen Werte bereits die korrekt durch 5 gekürzten der Ursprünglichen sind.

Zeile 8:
In Zeile 8 ist ein Fehler in Spalte I enthalten, welcher sich jedoch nicht auf die Richtigkeit der weiteren Werte ausgewirkt hat, dies belegt die bereits mehrfach erwähnte automatische Korrektur durch die Nutzung von Wurzelwerttabellen. Ob der Fehler durch einen Versehen bei manuellen Quadrieren von Spalte 0 zu Spalte I entstand, oder durch ein falsches Abschreiben aus einer Tabelle ist nicht klar zu entscheiden, doch erscheint die erste Variante die plausiblere zu sein.

Zeile 9:
Hier handelt es sich um einen klaren Schreibfehler, einmal gesetzt wollte der Verfasser den falschen Einer nicht revidieren, zumal wie schon beschrieben ggf. mehrere Kontrollmechanismen griffen.

Zeile 13:
Da die Tafel nachweislich zu einer Zeit entstand in der das Keilschriftzeichen für Doppel Null bzw. als Platzhalter noch nicht genutzt wurde, ist die Darstellung mit großem Abstand zwischen der 2. und 4. sexagesimalen Stelle, in Spalte I korrekt.
Trotz dessen handelt es sich beim nun in der II Spalte folgenden Fehler um den Interessantesten. Dadurch wird implizit die hier dargelegte Berechnungsabfolge nochmals bestätigt. Der babylonische Verfasser entnahm den Ausgangswert der Spalte I für Spalte II bzw. suchte korrekt in der Wurzelwerttabelle danach. Es kann nur vermutet werden, dass er dabei durch Unachtsamkeit, oder Ablenkung in die falsche Spalte der nebeneinander stehenden Zahlenwerte gelangte und darin vermutlich sofort einen Ihm im Kontext dieser Berechnungen sehr geläufigen gemeinsamen Faktor = 3.45 erkannte.
So wurde vom eigentlichen Ausgangswert und nicht dessen Wurzel aus, die nun folgende Erweiterung durchgeführt. So multiplizierte der Verfasser den kompletten Wert der Spalte I (abzüglich 1.0.0 für den Wert der Spalte II) mit dem Reziproken dieses Faktors 16. Hieraus entstand 27.00.3.45 x 16 = 7.12.1.
Das der Verfasser auch plausibel nicht beim eigentlich korrekten und dann zu erweiternden Wert angelangt ist, wird ebenso deutlich. Zum einen wäre ihm beim korrekten und bereits sehr kompakten Zwischenergebnis bab-tan α = 40.15 dessen Erweiterung mit dem reziproken Faktor 4 (15 reziprok 4), sofort ebenso ins Auge gesprungen, zum anderen war auch in der Berechnungsabfolge kein erneutes Quadrieren vorgesehen, was den real geschriebenen Wert erklären würde.
Es ergibt sich ein reales Tripel von 2.41 ; 4.49 ; (4.00)

Zeile 15:
Der Fehler in Zeile 15 unterstreicht einmal mehr die spaltenweise Bearbeitung, gegenüber der eigentlich für uns normalen Zeilenweisen.
Aus den Ausgangswerten der Spalte I entstanden in der Zwischenrechnung bzw. Ablesung aus der Wurzelwerttabelle der bab-tanα = 37.20 für Spalte II ; und der bab-secα = 1.10.40 für Spalte III.
Der gemeinsame Kehrwert von 20 = 3 als Multiplikator ergibt ein reguläres Tripel 1.52 ; 3.32 ; (3.00).

Jedoch wurde im Folgenden wiederum das Ergebnis der Spalten vor dem notieren auf der Tafel gekürzt, dass der Spalte II für die Weite entsprechend 1.52 dividiert durch 2 = 56. Das Ergebnis der Diagonalen in Spalte III, 3.32 wurde, jedoch durch 4 gekürzt und ergab so 53.
Es kann an dieser Stelle nur vermutet werden, dass ursprünglich nicht die Absicht bestand Tripel mit einem Basiswert (Ankathete; Adjacent) unter 1 = 60 festzuhalten. Ursprünglich beabsichtigt scheint also das Tripel 56 ; 1.46 ; (1.30) gewesen zu sein, auch wenn das Tripel 28 ; 53 ; (45) ebenso rechnerisch korrekt wäre. (Siehe auch Neugebauer und Sachs 1945 S38)

Resümierend zur vorangegangenen Fehleranalyse kann folgendes zusammengefasst werden. Obwohl alle Fehler heute wie damals nicht zum Ausfall der kompletten Wertezeile führen ist markant, dass viele der fehlerhaften Werte direkt, oder indirekt mit der zeitversetzten Bearbeitung der Spalten II und III zusammenhängen.
Hierbei gibt es nur 2 mögliche Szenarien, dem babylonischen Verfasser ging es in erster Linie um die Fixierung des Steigungsverhältnisses mittels der Spalten 0 und I von Zeile 1 bis 15. Erst danach wurden die beiden Spalten II und II voneinander unabhängig, also Spaltenweise, errechnet. Dies würde die Entstehung der Fehler plausibel erklären, doch nicht für Flüchtigkeits- oder Ablese-fehler sprechen.

Plausibler erscheint demnach und dies unterstützt die hier vorgestellten Berechnungsabfolge, dass die als sehr effizient bekannten babylonischen Mathematiker, bereits am Übergang von Spalte 0 zu Spalte I, das ohnehin bereits errechnete Ergebnis des bab-sec α noch vor dem Quadrieren, für die Spalte III verwendeten. Aus der Sicherheit der vorhandenen Korrekturmöglichkeiten heraus, wurde bereits mit einem bekannten Faktor erweitert und diese Werte sogar schon gekürzt. Dieser Wert wurde so bereits einige Zwischenrechnungen vor denen in Spalte II erweitert und notiert. Hierbei hätten wir also eine zwar zeitlich versetzte, aber doch zeilenweise Abarbeitung der Werte, auf diese Wiese fehlte jedoch auch der direkt vergleichende, deutlich optimalere Bezug, zur nebenstehenden Spalte II.

4. Erfüllt die hier vorgestellte wiederentdeckte Berechnungsabfolge, selbst die kritischsten Aspekte der Wissenschaft zu Plimpton 322 und zur Nutzung der Trigonometrie in altbabylonischer Zeit?

Die bekannte Expertin auf diesem Gebiet, Eleanor Robson stellte 2001 sechs Bedingungen auf, nach welchen die jeweiligen Darlegungen zum Inhalt der Keilschrifttafel überprüft werden sollten. Wenn diese nicht zuträfen, dann würde sich die Theorie im speziellen für die Überlegungen zu trigonometrischen Belangen ausschließen.

Sehen wir uns also diese Bedingungen an und schauen nach deren Erfüllungsgrad:

1 . Die Darlegungen müssen in den historischen Kontext der altbabylonischen Zeit passen.

Wir wissen von vielen mathematischen Keilschrifttafeln, auf denen es sich um Problematiken von Steigungsverhältnissen, Schüttkegeln etc. handelt, explizit wurden hierfür Diagonalen genutzt. Auf einigen davon wurden sogar Verhältnisse der Seiten zueinander, danach mit der Reallänge multipliziert, um die Aufgabe zu vervollständigen. Andere, zeigen Berechnungen von gleichmäßigen Sektoren im Kreis und die Nutzung der Kreisbogensegmente. Exemplarisch sei hier auf eine weniger bekannte Keilschrifttafel BM 085194 r i 33 und folgende verwiesen. Des Weiteren wissen für aus den Überlieferungen zu astronomischen Ereignissen, auch wenn deren letztendlich Entstehungsweise noch nicht offen gelegt ist, dass es sehr präzise Methoden gegeben haben muss, um spezielle Orte am Himmel, wieder zu lokalisieren und miteinander auch nach Jahren zu vergleichen. Es bedurfte also nicht unseres heutigen Winkelbegriffes, um für die praktische Anwendung, einen Anstieg oder eine Proportionalität zueinander, zu beschreiben.

Die hier nachgewiesene Berechnungsabfolge befindet sich also vollständig im historischen Kontext.

2. Die dargelegte Methodik müsse sich in die kulturelle Konsistenz, hier ist das allgemeine Wissensniveau der Zeit und Region gemeint, einpassen.

In diesem Fall überschneidet sich die Antwort auf die Frage mit Frage 1.
Es kann jedoch festgehalten werden, dass die hier nachgewiesene Berechnungsabfolge sich vollständig im zeitlichen und räumlichen Kontext mit diversen anderen Zeitdokumenten befindet, doch Plimpton 322 bleibt von all diesen das weltweit komplexeste, detailreichste und damit Einzigartigste.

3. Die vorgestellte Rechenabfolge, und weitere damit zusammenhängende Analysen, müssen in die Rechenlogik der altbabylonischen Zeit und der Region passen.

Ohne an dieser Stelle noch einmal die Berechnungen auf Plimpton 322 zu wiederholen, ist sofort feststellbar, dass sich einige Wesenszüge der Berechnung, auch auf anderen Keilschriftartefakten wiederfinden. Ebenso richtet sich diese auch komplett nach der Vorgabe der Überschrift Spalte 1 und ist in ihrer Präzision und Abstraktionsfähigkeit und nur auf die Notwendigkeiten bedachten Arbeit, sogar sehr typisch für diese Zeit.

4. Die Erklärung des Konstruktionsprinzips zu Plimpton 322 müsse den physikalischen Gegebenheiten entsprechen bzw. damit korrespondieren. Hiermit wird auf die vermutlich ca. 5-6 cm größere Breite der Keilschrifttafel verwiesen und dass deshalb die Methodik auch plausibel nachweise sollte, welche Daten an dieser verloren gegangenen Seite gestanden haben.

Wie dargelegt wurde, passen sich die logisch ehemals vor der heutigen 1. Spalte notierten Inhalte, sowohl methodisch, wie auch Aufgrund Ihrer Kürze mit maximal 4 sexagesimalen Stellen sehr gut ein.

Bezogen auf die Proportionen des heutig verbliebenen Teilstücks und der ursprünglichen Größe kann man sagen, dass der linke verlorene Teil, etwas größer aber mindestens gleich breit wie die heutigen Spalten III und IV sind. Es kann sogar so aufgrund der Schriftgröße antizipiert werden, dass es eine weitere schmale Spalte am ursprünglich äußersten linken Rand der Tafel gab.

Auch diese Bedingung ist demnach als vollständig erfüllt anzusehen.

5. Hier werden die Vollständigkeit und der direkte Bezug der Überschriften zu den darunter stehenden Zahlen eingefordert.

Die dargelegte Berechnungsabfolge erfüllt auch diese Bedingung vollständig und zeigt uns so auch auf typisch babylonische Weise, wie Zwischenrechnungen bzw. weitere Berechnungsschritte auch unbenannt auszusehen haben.

6. Die letzte von E. Robson definierte Bedingung ist, dass die logische Abfolge des Tabellenaufbaus der Abfolge der Berechnungsschritte entsprechen müsse und dass, es so keine neuen Inhalte ohne Bezug auf die anderen Spalten geben darf.

An dieser Stelle kann gesagt werden, dass hier erstmals eine Berechnungsabfolge vorgestellt wurde, die in Reihenfolge und Notwendigkeit alle vorhandenen Spalten einbezieht.

Auch diese Bedingung ist Anhand der dargelegten Schritte demnach vollständig erfüllt.

Diese, wie E. Robson (2001 S.199-202) selbst in Ihrer Zusammenfassung schreibt, auch bewusst provokativ verfassten und ebenso auch in die Richtung und Denkweise von Buck, Friberg und Robson zielenden Bedingungen, sollten die Legitimität inkompletter trigonometrischer Lösungen ausschließen. Die Messlatte sollte bewusst so hoch gelegt werden, dass diese Hürden nur durch eine vollständige Erfüllung der Bedingungen übersprungen werden können.

Dass mit dem hier dargelegten Konstruktionsprinzip all diese Bedingungen, im Gegensatz zu den verschiedensten genannten Annahmen im Bereich der bisherigen Forschungshistorie, voll erfüllt werden, war demnach so nicht beabsichtigt, überzeugt so aber hoffentlich auch die kritischsten Leser dieser Ausarbeitung.

5. Wofür wurde Plimpton 322 erstellt? Welche Daten sollte die Keilschrifttafel festhalten?

Da hier nun umfänglich die hinter Plimpton 322 liegende Systematik erläutert wurde und es zusätzlich nachgewiesen wurde, dass es ein im Mittel in 36 Winkelminuten oder kleiner, abgestuftes durchgehendes System aus Steigungsdreiecken zwischen 0 und 82 Grad gab, ist an dieser Stelle die Kardinalfrage zu beantworten. Wofür wurde Plimpton 322 notiert und weshalb enthält die Tafel diese willkürlich erscheinenden Winkel? (so auch P. Moree 2017 in Humml 2017)

Die in diesem Abschnitt vorgestellte plausible Theorie dafür, basiert auf dem bekannten Wissen über die babylonische Mathematik und Astronomie. Zur nahezu gleichen Zeit entstanden so auch die Venustafeln des Ammi-Saduqa (Odenwald 2019). Hierin wurde die siderische Umlaufzeit des Planeten Venus anhand verschiedener Beobachtungs-Zyklen über mehr als 20 Jahre analysiert, so dass sich dieser auf 584 Tage festgelegen ließ. Der reale Wert eines solchen Umlaufs liegt mit den heutigen Messmethoden bei 583,92 Tagen (van der Waerden 1942 und andere). Wir erkennen hieraus den besonders hoch angebundenen Stellenwert astronomischer Beobachtungen in altbabylonischer Zeit.

Ebenso wird aber auch die enge Verknüpfung zwischen Astronomie und Mathematik nicht nur zu jener Zeit deutlich. Ebenso auch als Literaturreferenz hier bereits benannte und weitere internationale Mathematiker des 20sten Jahrhunderts beschäftigten sich so, auch intensiv mit jenen Venustafeln (Neugebauer 1957, P.57ff). Wir können deshalb sicher sein, das auch in altbabylonischer Zeit die besten Mathematiker mit den besten verfügbaren Möglichkeiten und Berechnungsverfahren ausgerüstet, entsprechende Messungen durchführten. Für solche Messungen über Jahre hinweg mit höchster Präzision, war eine Dokumentation, wie Sie Plimpton 322 darstellt und eine hochpräzise Zeitmessung unumgänglich. Wasseruhren waren außerhalb des täglichen Gebrauchs für solch komplexe Beobachtungen nicht brauchbar.

Stark mit der Natur verbunden und aus dieser nahezu Alles für den praktischen Alltag ableitend, nutzten die Babylonier, denen wir auch die sexagesimale Teilung der Zeit verdanken, nachweislich astronomische Anlässe für die Präzisierung der Zeit.

Der Tag begann mit dem Verschwinden der Sonnenscheibe am westlichen Horizont. Der Neue Monat begann bei der Beobachtung genau der gleichen Himmelsregion, wenn die erste zarte Mondsichel nach Neumond zu sehen war. Im Weiteren wurde, wie uns auch die Himmelsscheibe von Nebra zeigen will, bei gewissen Konjunktionen zwischen den Plejaden, als Siebengestirn und dem zunehmenden Mond wiederum in der gleichen Himmelsregion und nur direkt nach Sonnenuntergang sichtbar, ein Schaltmonat eingefügt, um den „himmlischen“ Ablauf der Zeit zu gewährleisten.

Wir können also konstatieren, dass die babylonische Zeitmessung sowohl von astronomischen Ereignissen bestimmt, wie auch durch Solche regelmäßig justiert wurde. Gleiches gilt selbstverständlich auch für die bereits angesprochenen astronomischen Messungen jener Zeit.

Tatsächlich gibt es ein sowohl mit der Venus, wie auch mit dem präzisen Fortgang der Zeit zusammenhängendes regelmäßiges astronomisches Ereignis, welches entsprechend auch für die babylonischen Astronomen von größter Bedeutung war. Hierbei befindet sich alle 2919,6 Tage der Planet Venus an exakt der gleichen Position am Himmel und wiederum handelt es sich hierbei um den Zeitpunkt des Sonnenuntergangs am westlichen Abendhimmel. Dieses Ereignis fand zusätzlich, ebenso immer in der Nähe der Plejaden, die mit der Himmelsscheibe von Nebra schon benannt wurden, statt.

Messen wir der Zahl 2919,6 Tage keine besondere Bedeutung zu, so wissen doch jetzt schon Eingeweihte und wir spätestens nach dem Multiplizieren der korrekten Tage unseres Jahres mit 8 sofort, das die beiden Zahlen nahezu gleich sind.

Die 2919,6 Erdentage entsprechen 5 Venusumläufen und 8 Jahre a 365,26 Tagen entsprechen 2922,1 unserer Tage. Mit einer zeitlichen Genauigkeit nach 8 Jahren von 99,914%, oder einer dementsprechenden Abweichung von nur 2,5 Tagen (oder 7,5h pro Jahr) kehrte diese himmlische Konstellation regelmäßig wieder ein. Mit rund 3 Sekunden pro Stunde Abweichung gegenüber dem Normal und garantiert ohne Folgefehler während der 8 Jahre Laufzeit, war dieses Ereignis sicherlich präziser, als manche neue mechanische Uhr unserer Zeit.

Dieser unter Astronomen in aller Welt bekannte 8 Jährige Zyklus, stellt sich immer zum Zeitpunkt der größten östlichen Elongation der Venus ein und ist eines der markantesten astronomischen Ereignisse.

Kehren wir nun zu Plimpton 322 und den Anfang dieses Abschnittes zurück, so stellt sich diese größte östliche Elongation der Venus verbunden mit der besten und längsten Sichtbarkeit immer im März, also nahe des Frühlingspunktes nur alle 8 Jahre einmal ein.

Da, wie in den vorhergehenden Punkten dieser Arbeit dargelegt beliebige andere Steigungsdreiecke mit deren Winkeln existierten, sollten uns diese besonderen Winkel der Tafel interessieren.

Nach den bisherigen Forschungen kann aber eine sehr wahrscheinliche Theorie hier benannt werden:

- Plimpton 322 ist der exakt dokumentierte Verlauf einer größten östlich Elongation der Venus vom Zeitpunkt des Sonnenuntergangs an einem solchen Tag, bis zum Abbruch der Beobachtungen nach 15 Zeilen, oder exakt 3600 Sekunden, (60 Minuten) vor rund 3800 Jahren.

Wir erinnern uns an den babylonischen Tagesbeginn zum Zeitpunkt der letzten Sonnenstrahlen am westlichen Abendhimmel als einen für die Babylonier sehr gut abzuschätzenden Moment. Schauen wir uns am Tag der größten östlichen Elongation der Venus exakt zu Sonnenuntergang deren Position an, so befindet sich diese zu diesem Zeitpunkt auf einer Höhe von 44,76° über dem Horizont.

Diese Horizonthöhe exakt zum Zeitpunkt des Sonnenuntergangs lässt sich für die derzeit, mit Hilfe von empfohlenen Programmen verschiedener Sternwarten, für historische Astronomie, bestimmten und überprüften Daten, für den Zeitraum des 18. und 17. Jahrhunderts vor Christus, belegen.

Ebenso führt die Einstufung von Plimpton 322 als Dokumentation einer realen Beobachtungsreihe zu einer weiteren Antwort. Es wurde oft die Frage gestellt, weshalb denn die Winkelunterschiede nicht völlig regelmäßig wären und „Gaps“ also Löcher, oder auch Sprünge aufwiesen.

Dies ist jedoch für eine, wenn auch bedeutende Messung nachvollziehbar, denn vorbeiziehende Wolken, oder sonstige Ereignisse bei der Messung konnten einzelne Positionen „ausfallen“ lassen. Aufgrund der durch die vorgenommene Selektion der Werte festen Abstufung zwischen möglichen Steigungsverhältnissen, hätte sonst bei einer Zwischenmessung ein Vor- oder Rück-sprung erfolgen müssen, dies hätte jedoch im Gegensatz zu einem einfach größeren Intervall zu einer Verfälschung der Messreihe geführt. John D. Weir (Weir 1982, P.30) beschreibt warum gerade die Planetenbewegungen am westlichen Abendhimmel für solche Beobachtungen genutzt wurden und dass dort einzig das Wetter ein Hindernis bei der Erfassung der Position darstellen konnte.

Obwohl der Zeitraum für die Beobachtung im mehrjährigen Bahn-Zyklus der Venus, während der 2.Dekade des März besonders günstig ist, lässt sich zu dieser Jahreszeit und in der Region der damaligen Beobachtung, genau diese mögliche Bewölkung während der Beobachtung plausibel darlegen. Anhand moderner Wetterbeobachtungen in der betreffenden Region finden wir 55- 30% Wolkenbedeckung zwischen Februar und April. (Quelle: weatherspark.com)

So lässt sich auf diese Weise auch eine der letzten offenen Fragen zu Plimpton 322 plausibel beantworten, denn die bereits vorgezeichneten doch leer gebliebenen Zeilen auf der Rückseite der Keilschrifttafel sollten für weitere Messungen bis zum Horizont vorbereitet sein.

Dass die Wertereihe hierbei durch, diese mit hoher Wahrscheinlichkeit anzunehmenden Wetterverhältnisse, bereits nach der 15ten Reihe und nahezu exakt einem Zeitraum von 1 Stunde bzw. 3600 Sekunden endete, ist sicher auch für heutige Astronomen plausibel, oder gar aus eigener Erfahrung nachvollziehbar.

6. Bibliographie

Abdulaziz, A.A. 2010. *The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples*.

Britton, J.P., C. Proust, and S. Shnider. 2011. “Plimpton 322: a review and a different perspective.” *Arch. Hist. Exact Sci.* 65(5):519–66.

Bruins E. M. 1949. *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings* 52:191.

Bruins E. M. 1967. *Physis* 9:371.

Deutschland, B.I. 2019. “Forscher entschlüsseln 3.700 Jahre alte Tafel — das Ergebnis halten sie zuerst für einen Irrtum.” *Business Insider.* https://www.businessinsider.de/wissenschaft/forscher-glauben-den-zweck-einer-3700-jahre-tafel-gefunden-zu-haben-2018-6/ (18 October, 2021.426Z).

Friberg, J. 1981. “Methods and traditions of Babylonian mathematics.” *Historia Mathematica* 8(3):277–318.

Friberg, J., ed. 2007. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Manuscripts in the Schøyen Collection Cuneiform Texts I.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York, NY: Springer Science+Business Media LLC.

Humml, S. 2017. “Uralte Tontafel: Hat dieser Mann ein Jahrtausendrätsel gelöst?” *WELT.* https://www.welt.de/wissenschaft/article167987863/Hat-dieser-Mann-ein-Jahrtausendraetsel-geloest.html (18 October, 2021.073Z).

Høyrup J. 1999. “Pythagorean "rule" and "theorem": mirror of the relation between Babylonian and Greek Mathematics.” *Babylon : Focus mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne: 2. Internationales Colloquium der Deutschen Orient-Gesellschaft 24.-26. März 1998 in Berlin.* https://forskning.ruc.dk/en/publications/pythagorean-rule-and-theorem-mirror-of-the-relation-between-babyl.

Kleb, J. 2020. “*Table of 140 so called Pythagorean Triples between 45 and 0 Degree calculated according the original procedure of Plimpton 322. An Excerpt of my current research 2020”. DOI:* http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.36634.47049.

Kleb, J. 2021. “*Further more than 130 Plimpton 322 compliant Triples in Addition to Table 1. (table-2 between 45 and 83 degrees)” DOI:* http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.14473.98406

Mansfield, D.F. 2021. “Plimpton 322: A Study of Rectangles.” *Found Sci*:1–29. https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-021-09806-0.

Mansfield, D.F., and N.J. Wildberger. 2017. “Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry.” *Historia Mathematica* 44(4):395–419.

Neugebauer, O. 1954. “Babylonian Planetary Theory.” *Proceedings of the American Philosophical Society* 98(1):60–89. http://www.jstor.org/stable/3143671.

Neugebauer, O. 1957. *The Exact Sciences in Antiquity:* Courier Corporation ,2nd Edition 1969.

Neugebauer O. 1937. *Mathematische Keilschrift-Texte. 3. Erg.-H*.

Neugebauer O. 1973. *Mathematische Keilschrift-Texte* 1.

Neugebauer O. 1973. *Mathematische Keilschrift-Texte: ed. with translation and commentary in German: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln*.

Neugebauer O. 1945*. and A. Sachs , Mathematical Cuneiform Texts, New Haven, Connecticut, 1945 . Plimpton 322 is published and discussed on p.38 -41.* 1945.

Odenwald, S. 2019. *Space Exploration. A History in 100 Objects.* New York: Experiment LLC The.

Robson, E. 2001. “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322.” *Historia Mathematica* 28(3):167–206.

Schmidt, O. 1980. “On Plimpton 322. Pythagorean Numbers in Babylonian Mathematics.” *Centaurus* 24(1):4–13. http://dx.doi.org/10.1111/j.1600-0498.1980.tb00363.x.

Scriba, C.J., and P. Schreiber. 2001. *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen.* Vom Zählstein zum Computer. Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hongkong, London, Mailand, Paris, Singapur, Tokio: Springer.

Scriba, C.J., and P. Schreiber. 2015. *5000 Years of Geometry. Mathematics in History and Culture.* 2015th ed. Basel: Birkhäuser Verlag GmbH.

van der Waerden, B.L. 1942. *Die Berechnung der ersten und letzten Sichtbarkeit von Mond und Planeten und die Venustafeln des Ammisaduqa*.

Weir, J.D. 1972. *The Venus Tablets of Ammizaduga*.

Weir, J.D. 1982. “The Venus Tablets: A Fresh Approach.” *Journal for the History of Astronomy* 13(1):23–49.